

Oriented Particle を説明するための物理モデル

日野 綾香^{1,a)} Ding Haiyang^{1,b)} 三武 裕玄^{1,c)} 長谷川 晶一^{1,d)}

概要：柔軟物の大変形のシミュレーションに有限要素法を用いると剛性行列の更新に多大な計算時間を要する。Müller らが提案した Shape Matching やそれを拡張した Oriented Particle という手法は有限要素法に比べて計算量が少ないという長所を持つ。しかし、幾何学的な更新アルゴリズムに基づく手法であるので、格子法や有限要素法のように物理法則を離散化してシミュレーションをするものではないため、モデルを精細化しても力学に基づいた振る舞いになるとは限らない。さらに Oriented Particle では、シミュレーション対象の硬さを材料の物理パラメータに基づいて計算をして求めることができず、挙動を見ながら調整する必要がある。そこで本研究では Oriented Particle のアルゴリズムを物理モデルのシミュレーションとして解釈し、その物理モデルの性質について考察する。

1. はじめに

物理シミュレーションを行う手法として連続体問題の空間方向を計算格子で離散化させ、各点に物理量を格納して結果を求める格子法や有限要素法などが従来からの代表的な手法となっている。これらの手法では空間と時間の解像度を上げていけば解析解に収束するので、精度の良いシミュレーションを行える。しかし、時間が 1 ステップ進むごとに大規模な行列計算を行わなければならないので計算量が増えてしまい、リアルタイムでシミュレーションを行うことが求められるインタラクティブシステムでの利便性は低い。

そこで Müller らはリアルタイム処理を可能とする Shape matching[1] という手法を提案した。従来の格子を使用する方法とは異なり、粒子を用いることによりメッシュレスで高速な弾性体シミュレーションを行うことが可能である。Shape matching では粒子は点群の集まりとして考えているが、楕円体の集合としてグループも考慮する改良を行い、粒子の位置の制約を直接扱う Position based dynamics[2] を組み込んだ手法が Oriented Particle[3] である。Oriented Particle ではより低い自由度で精度の高いシミュレーションが可能となり、有限要素法に比べて計算量が少ないという長所がある。しかし、Shape Matching も Oriented Particle も幾何学的な更新アルゴリズムに基

づく手法であるので、格子法や有限要素法のように物理法則を離散化してシミュレーションをするものではないため、モデルを精細化しても力学に基づいた振る舞いになるとは限らない、という大きな欠点を持つ。さらに Oriented Particle では、シミュレーション対象の硬さを材料の物理パラメータに基づいて計算をして求めることができず、挙動を見ながら調整する必要があるため、物理パラメータによって現実に近い挙動が自動的に得られるという物理シミュレーションの利点を一部失っている。

そこで本研究では Oriented Particle のアルゴリズムを物理モデルのシミュレーションとして解釈し、その物理モデルの性質について考察する。

2. Oriented Particle における Shape Matching

ここでは、Oriented Particle に使用されている Shape Matching について説明する。Shape Matching ではシミュレーション対象は頂点群の集まりと考えられていたが、Oriented Particle では点群を楕円体の粒子として考え、粒子はそれぞれグループに所属していると考えられる。

今、Oriented Particle のグループ構成に従ってシミュレーション対象の物体は m 個のグループで構成されており、あるグループ k は n 個の粒子から成っていると仮定する。ここで、各粒子の初期位置を \bar{x}_i 、現在位置を x_i 、粒子自体の重さを m_i 、初期位置におけるグループ k の重心座標を $\bar{c}_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ 、現在位置におけるグループ k の重心座標を $c_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ とする。このときグループ k

¹ 東京工業大学
神奈川県横浜市緑区長津田町 4259 R2-624
a) hino@haselab.net
b) teikaiyo@haselab.net
c) mitake@haselab.net
d) hase@haselab.net

における慣性行列 A_k は

$$A_k = \sum_{i=1}^n (A_i + m_i x_i \bar{x}_i^T - m_i c_k \bar{c}_k^T) \quad (1)$$

と表すことができる。ただし、 A_i は各剛体ごとの慣性行列であり、このときの粒子の回転行列を R_{A_i} とすると、

$$A_i = \int_{V_{r_i}} \rho_i (R_{A_i} x_i) x_i^T dV_{r_i} \quad (2)$$

である。このとき、 A_k に極分解を施し回転行列 R_k と変形行列 S_k に分ける。つまり、各粒子の目標位置 g_i は、

$$g_i = R_k (\bar{x}_i - \bar{c}_k) + c_k \quad (3)$$

と表せる。そしてこの目標位置に現在位置を修正する。以上一連のアルゴリズムが、Oriented Particle における Shape Matching である。

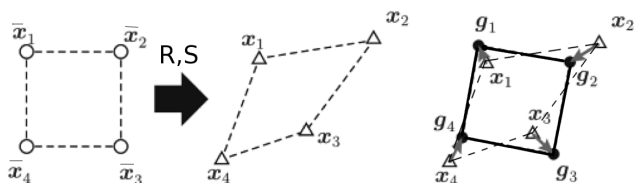


図 1 Shape Matching

3. 提案モデル

ここでは Oriented Particle を説明するために物理モデルを導入する。Oriented Particle の粒子は向き情報を持っているが、始めは簡単のため向き情報を持っていない場合の物理モデルを提案する。その後、向き情報を加味された粒子、すなわち Oriented Particle の物理モデルを導入する。

3.1 向き情報がない場合

粒子が向き情報を持たない場合の提案モデルを紹介する。重さがなく変形もしないある形をしたフレーム A があるとする。Oriented Particle のグループ構成と合わせるために、フレームは m 個で構成されているとし、このときフレーム A_k について考察してみる。 A_k が各バネを経て、各剛体と繋がっていると、各剛体の初期位置を \bar{x}_i 、重さを m_i とする。ただし、各バネ係数は m_i に比例しているとする。フレームから手を離れたとき、フレーム自体とバネが並進をし、その後回転をして、現在位置 x_i に移動したとする。このとき、フレーム自体の回転行列を R_k 、フレームの並進を t_k とする。各フレームごとにおける重心の位置を回転中心とする。以上の説明は図 2 の通り。

3.2 向き情報がある場合

向き情報がある Oriented Particle の場合の提案モデルを紹介する。重さがなく形も変形しないフレームに剛体がかっついているとする。この剛体も含めフレームとしフ

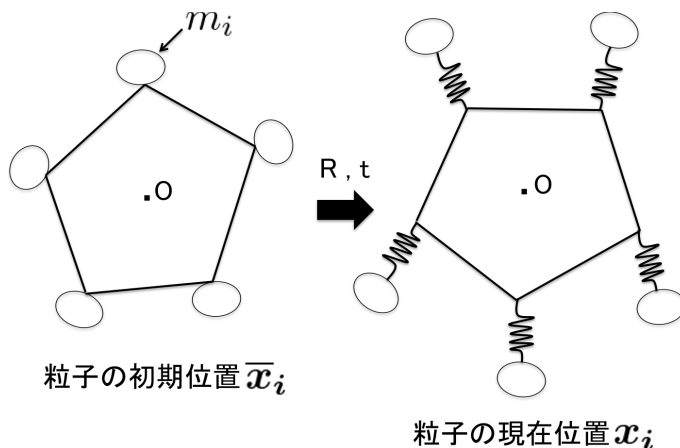


図 2 向き情報がない場合の提案モデル

レームを拡張する。このフレームの初期位置を \bar{p}_i とする。このフレームの一部である剛体には無数の分散バネを経て他の剛体とくっついているとし、この剛体の初期位置はフレームの一部である剛体と同じなので \bar{p}_i 、バネの並進だけによる位置を p_i とする。また、各剛体の密度を ρ_i 、初期位置における向きを \bar{r}_i 、剛体自体の回転行列を R_{A_i} とすると、現在位置における剛体の向きは $R_{A_i} \bar{r}_i$ となる。図 4 に示している。右の図の点線は元の位置を表し、現在の状態が実線で表している。ここで全体をグローバル座標系で表すと、現在位置は $R_{A_i} \bar{r}_i + p_i$ と表せる。フレーム自体の回転行列を R_k 、フレームの並進を t_k とする。各フレームごとにおける重心の位置を回転中心とする。図 3 は Oriented Particle を説明する提案モデルである。見やすさのため、一カ所のみ様子をしめしている。(他は省略)

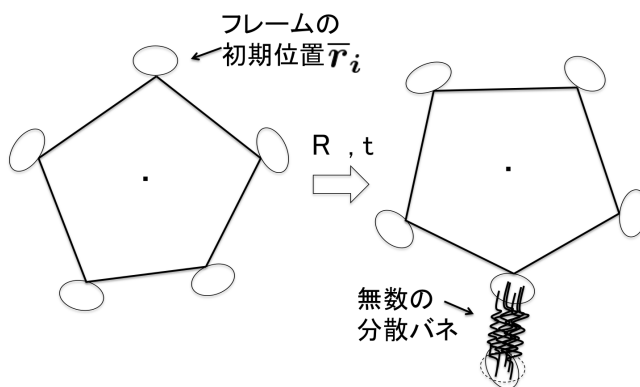


図 3 Oriented Particle を説明する提案モデル

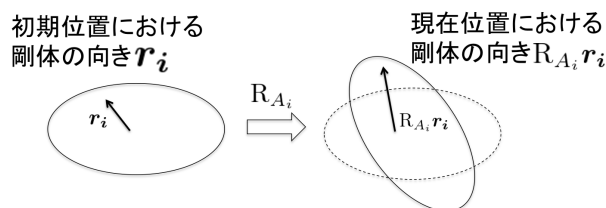


図 4 粒子自体の回転に着目

4. 物理性を持つことの証明

4.1 向き情報がある場合

まず始めに、各粒子は向き情報を持っていない場合について考える。このとき、[3]の式(5)より、

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - m_i \mathbf{c}_k \bar{\mathbf{c}}_k^T) \quad (4)$$

と表せる。式(4)を重心座標系に書き表すと、

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T)$$

となる。また、 A_k はテンソル積記号 \otimes を用いて表すと、

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T)$$

と表記できる。Oriented Particleにおけるmoment matrix A^k は極分解でき、

$$A_k = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T) \\ = RS$$

となる。一般に任意の正方行列 A は直交行列 R と半正定値対称行列 S に分解することができる。この両辺に左から R^{-1} をかけると、

$$R^{-1}A_k = \sum_{i=1}^n (m_i (R^{-1}\mathbf{x}_i) \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T) \\ = S$$

となる。 $S_i = m_i (R^{-1}\mathbf{x}_i) \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T$ とおく。このとき、

$$S_i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{13}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{23}^i \\ S_{31}^i & S_{32}^i & S_{33}^i \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

とする。このとき、 S に対する外積は S の対称性から、

$$\begin{pmatrix} S_{23} - S_{32} \\ S_{31} - S_{13} \\ S_{12} - S_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

となる。さらに、 $\sum_{i=1}^n S_i$ におけるテンソル積表現を外積表現にすると、

$$\sum_{i=1}^n \{m_i (R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} \quad (6)$$

と表すことができる。式(5)と式(6)より、

$$\sum_{i=1}^n \{m_i (R^{-1}\mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} = \mathbf{0} \quad (7)$$

ここで提案モデルを考察する。フレーム全体の合力 F_k は、

$$F_k = \sum_{i=1}^n m_i \{\mathbf{x}_i - (R_k \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{t}_k)\} \quad (8)$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i - R_k \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{t}_k \sum_{i=1}^n m_i \quad (9)$$

と表せる。今、各フレームごとにおける初期位置の重心を回転中心としているので、

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \mathbf{0} \implies \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0} \quad (10)$$

である。よって式(9)と式(10)より、

$$F_k = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i - \mathbf{t}_k \sum_{i=1}^n m_i$$

となる。 F_k が0となる \mathbf{t}_k は、

$$\mathbf{t}_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

である。つまり、並進後のフレームの移動量は現在の剛体の重心である。よって、回転成分のみを考慮する。この場合の現在位置におけるバネが出すトルク τ_k の式は、

$$\tau_k = \sum_{i=1}^n \{m_i (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} \\ = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{x}_i \times \bar{\mathbf{x}}_i - m_i \bar{\mathbf{x}}_i \times \bar{\mathbf{x}}_i) \\ = \sum_{i=1}^n \{(m_i \mathbf{x}_i) \times \bar{\mathbf{x}}_i\} \quad (11)$$

となる。このとき $R^{-1}\mathbf{x}_i$ におけるトルクは式(7)より、

$$\tau_k = \mathbf{0}$$

と表すことができる。これはフレーム座標系から見ると現在の位置が R^{-1} だけ回転したもの、もしくはグローバル座標系から見ると初期位置のフレームが回転し現在の位置 $R\bar{\mathbf{x}}_i$ に移動すると見なせる。

である。以上より、トルク τ_k と合力 F_k がともに0となる位置、つまり提案モデルにおけるつりあいの位置は、

$$\mathbf{x}_i = R_i \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{t}_k \quad (12)$$

となる。ここで Oriented Particle における目標位置である式(3)も提案モデルに合わせて重心座標系に書き換えると、

$$\mathbf{g}_i = R \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{c}_k \quad (13)$$

となる。よって、式(12)と式(13)より、提案モデルが Oriented Particle の目標位置をモデル化したということを示すことができた。

4.2 向き情報がある場合

次に Oriented Particle の場合を考える．[3] の式 (6) より，各グループ k についての moment matrix は

$$A_k = \sum_{i=1}^n (A_i + m_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - m_i \mathbf{c}_i \bar{\mathbf{c}}_i^T) \quad (14)$$

と表せる．また，グローバル座標系から重心座標系に取り直したときの moment matrix A_k は，

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^n (A_i + m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T) \\ &= R_k S_k \end{aligned}$$

と表すことができる．ここで，提案モデルにおいて，バネが剛体に与えるトルクを表すテンソル積は，

$$A_i = \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) \otimes (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i)^T dV_{\mathbf{r}_i}$$

と表せる．この式を整理すると，

$$A_i = \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i) \otimes \mathbf{r}_i^T dV_{\mathbf{r}_i} + \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV_{\mathbf{r}_i} \quad (15)$$

となる． $\int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i \mathbf{p}_i \otimes \bar{\mathbf{p}}_i^T dV_{\mathbf{r}_i}$ は Oriented Particle において， $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i \otimes \bar{\mathbf{x}}_i^T$ と表すことができるので，式 (15) と Oriented Particle における A_i は一致することが示された．さらに，提案モデルにおける合力 \mathbf{F}_k の式は，

$$\mathbf{F}_k = \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i [(R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) - \{R_k (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{t}_k\}] dV_{\mathbf{r}_i}$$

となる．ここで，Oriented Particle の初期位置と現在位置の決め方と積分の性質より，

$$\begin{aligned} m_i &= \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i dV_{\mathbf{r}_i} \\ \bar{\mathbf{x}}_i &= \bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{x}_i &= R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i \end{aligned}$$

と表すことができる．式 (8) に帰着することができ，以下 4.1 章と同様に並進後のフレームの移動量は現在の剛体の重心である．よって，回転成分のみを考慮する．この場合の提案モデルにおけるトルク τ_k の式は，

$$\begin{aligned} \tau_k &= \int_{V_{\mathbf{r}_i}} [\rho_i \{(R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) - (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i)\} \times (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i)] dV_{\mathbf{r}_i} \\ &= \int_{V_{\mathbf{r}_i}} \rho_i (R_{A_i} \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i) \times (\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{p}}_i) dV_{\mathbf{r}_i} \quad (16) \end{aligned}$$

となる．ここで，Oriented Particle の初期位置と現在位置の決め方と積分の性質より，式 (11) に帰着することができ，以下 4.1 章と同様にすると

$$\tau_k = \mathbf{0} \quad (17)$$

となる．以上より，提案モデルが Oriented Particle の目標位置をモデル化したということを示すことができた．

5. 今後の課題

今回提案したモデルによって，提案モデルのつりあいの位置と目標位置が一致することは確認できた．しかし，Oriented Particle における粒子の状態 (位置，姿勢，速度，角速度) の時間発展の計算手法である Position Based Dynamics が，提案モデルで説明できるということは確認できていない．Position Based Dynamics においてもこの提案モデルで説明できるということを今後の目標におく．その後，具体的にヤング率とポアソン比が知られている材料で有限要素法を行い，そこから求めたばね係数によって Oriented Particle とのパラメータ同定を行うことを考えている．

参考文献

- [1] Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Matthias Teschner, and Markus Gross, Meshless deformations based on shape matching. ACE SIGGRAPH 2005 Papers 471-478 (2005).
- [2] Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Marcus Hennix, and John Ratcliff, Position based dynamics. J. Vis. Commun. Image Represent, Vol. 18, No.2, pp.109-118 (2007)
- [3] Matthias Müller, Nuttapon Chentanez, Solid Simulation with Oriented Particles. ACM Trans. Graph. 30, 92:1-92:10 (2011)